Խնդիր 3.1 Ձևափոխության նկարագրությունը համապատասխանեցրեք իր մատրիցին.

Նկարագրություն՝

ա. պտտում է 70°-ով

~~բ. ոչինչ չի անում~~

գ. շրջում է x-երի առանցքի շուրջ

~~դ. y-ների ուղղությամբ ձգում է 5 անգամ~~

~~ե. ամեն բան տանում է $y = 6x$ ուղղի վրա~~

~~զ. ամեն բան տանում է $y = 6x + 1$ ուղղի վրա~~

Մատրից՝

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

2. այդպիսի մատրից չկա

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0.342 & -0.939 \\ 0.939 & 0.342 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 18 & -6 \end{bmatrix}$

$A\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$y = 6x$

$4 \cdot 0 = 0$

$\begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

$a^2 + b^2 = 1$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin 70$

$2 \cdot 6 = 12$

Հուշում. *Հաշվեք որոշիչները: Հետևեք նաև, թե ո՞ւր է գնում* **0**-*ն:*

Խնդիր 3.2 Ինչի՞ է հավասար մատրիցի որոշիչը, եթե այն

ա. ամեն ինչ պտտում է 14°-ով և 1.5 անգամ ձգում x-երի ուղղությամբ

բ. *ա.* մատրիցի հակադարձն է

գ. $[1 \quad 0]$ վեկտորը տանում է $[2 \quad 4]$, իսկ $[0 \quad 1]$-ը՝ $[-1 \quad 0]$

դ. ունի հետևյալ տեսքը՝ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

ե. ունի հետևյալ տեսքը՝ $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

զ. *ե.* մատրիցն է՝ բարձրացրած խորանարդ

$|A| = |A|^{-1}$

$AA^{-1} = I$

$\det(A)$

$\frac{1}{1.5}$

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B =$

$= 2 \cdot 0 - (4 \cdot (-1)) = 4$

$|A^3| = k^3$

$L(x+y) = L(x) + L(y)$

$L(cx) = cL(x)$

$\forall c \in \mathbb{R}$

$A(x+y) = Ax + Ay$

$x + y = 2$

$$|A| = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix} \qquad (-1)^{i+j}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{1+1}$$

Խնդիր 3.5 Ենթադրենք տրված է

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

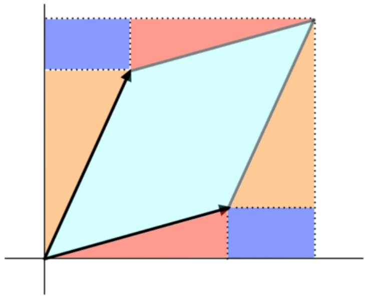
մատրիցը: A-ն կիրառելիս

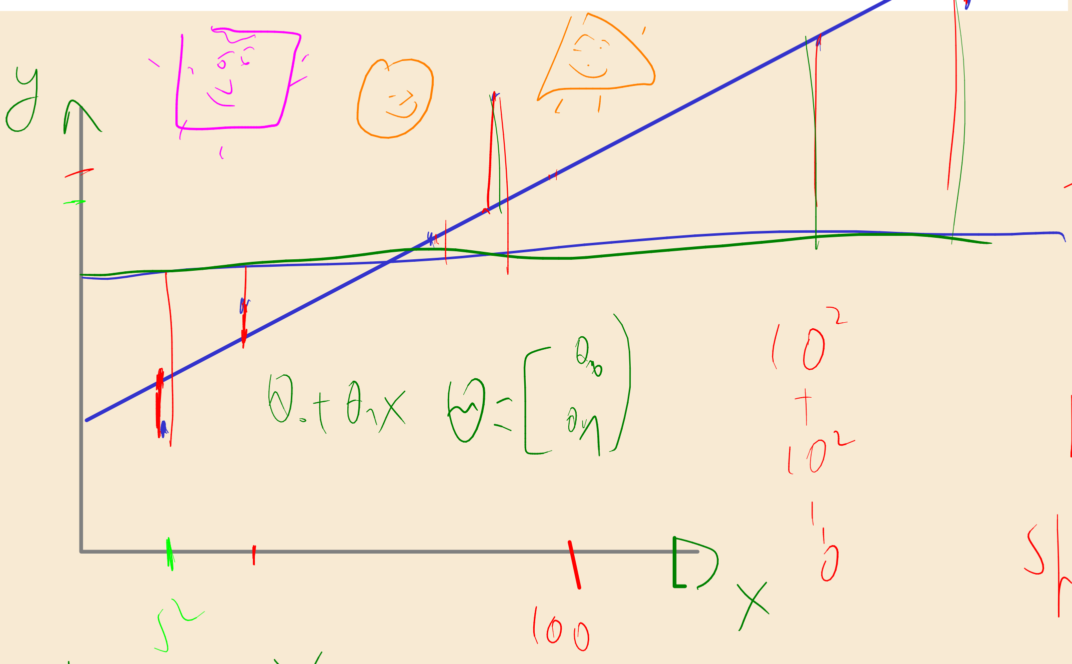
ա. որտե՞ղ է գնում $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ վեկտորը

բ. որտե՞ղ է գնում $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ վեկտորը

գ. ինչո՞ւ է դրանցով սպացված զուգահեռագծի մակերեսը հավասար $|\det(A)|$-ին

այս գծագիրը կարող է օգնել





$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i)\right)^2$$

MSE

$$\theta_0 + \theta_1 x \qquad \Theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$(\;)' = 0$$

$$\Theta = \underbrace{(X^T X)^{-1} X^T y}$$

normal equation

$$X^T X \Theta = X^T y$$

Խնդիր 2.2 Ի՞նչ կստանանք

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

մատրիցը կիրառելով հետևյալ վեկտորների վրա.

ա. $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

բ. $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

գ. $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Կոորդինատային հարթության վրա պատկերեք վեկտորներից յուրաքանչյուրը մինչև A-ով բազմապատկելը և դրանից հետո: Ի՞նչ եք տեսնում, ի՞նչ է անում մատրիցը վեկտորների հետ: Կարո՞ղ եք գուշակել, թե ինչպես կձևափոխվի $\begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$ վեկտորը:

Խնդիր 2.4 Դիտարկենք հետևյալ մատրիցը (կոչվում է *շեղման* կամ *սահքի մատրից*)՝

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ա. ի՞նչ կստանանք, եթե S-ը կիրառենք $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ վեկտորի վրա

բ. ի՞նչ կստանանք, եթե S-ը կիրառենք ստացված վեկտորի վրա

գ. ի՞նչ կստանանք, եթե մի անգամ էլ կիրառենք S-ը

դ. ի՞նչ եք կարծում, ի՞նչ կստանանք, եթե S-ը կիրառենք 100 անգամ այդ վեկտորի վրա

ե. կարո՞ղ եք հաշվել S^{100}-ը

shear

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Խնդիր 2.5 Ենթադրենք A-ն այնպիսի մատրից է, որ

$$A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix},\qquad A\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\1\end{bmatrix}$$

Քանի՞ր քանիսի վրա է A մատրիցը: Գտեք A-ն:

3

$2\times 2 \quad 2\times 1 \rightarrow 2\times 1$

$\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$

$$\underset{A}{A}\begin{bmatrix}1&3\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&7\\5&1\end{bmatrix}$$

$X\cdot 5=9$

$\frac{1}{5}x\cdot 5=\frac{1}{5}9$

$A\,B\,B^{-1}=C\,B^{-1}$

$B^{-1}AB=B^{-1}C$

$A\,B\,B^{-1}=\boxed{C\,B^{-1}}$

$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

02: Matrix products

Compute the following products:

1. $(A-B)(A+B)$, where $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. $A^2 - B^2$, with the same A and B as in part (b).
3. Any comments on the results?

$A \in R^{m \times p}$

$B \in R^{n \times k}$

$A - B = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-2 \\ -1-2 & 2-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

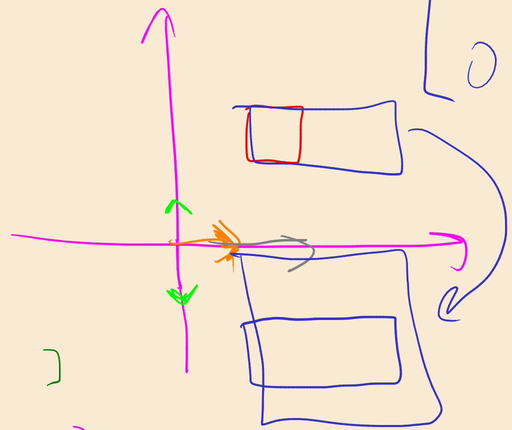
$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^3 \quad \begin{matrix} 2^3 & 0 \\ 0 & (-1)^3 \end{matrix}$

$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \qquad 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1$

$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3^2 + 5 \cdot 1 \qquad 3^2$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{bmatrix}$

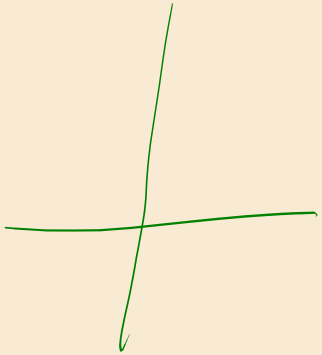


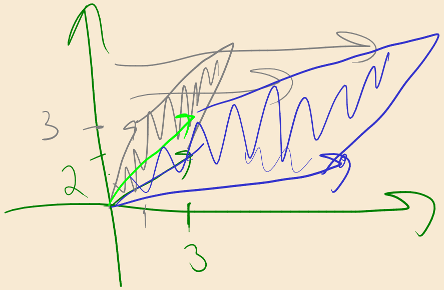
$(A-B)(A+B) = A^2 \cancel{+AB} \cancel{-BA} - B^2$

$AB = BA$

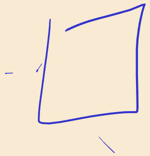
$A^2 - B^2$

$AB \neq BA$



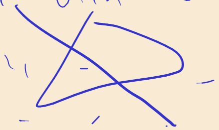


$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$



a_{11} a_{1n} a_{1j}

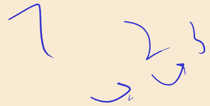
a_{21}



a_1

$(1 \cdot 2 \cdot 3)$

$3 \cdot 2 \cdot 1$



🧀 🧀 04: Diagonal matrix powers

Context

Diagonal matrices are particularly useful in linear algebra because their powers are easy to compute. This property is extensively used in eigenvalue decomposition and diagonalization of matrices (more on this later).

Consider the diagonal matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Compute A^2, A^3, and A^4.
2. Find a general formula for A^n where n is any positive integer.
3. What does this transformation represent geometrically? How does it affect the unit circle when applied repeatedly?
4. What happens when you apply this transformation to the vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ multiple times?

- Prove that $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$ if B is invertible.
- Suppose Q is a 3×3 real matrix such that $Q^TQ = I$. What values can $\det(Q)$ take?

$$|B^{-1}AB| = |A|$$

$$|A \cdot B| = |A|\,|B|$$

$$|B^{-1}|\,|A|\,|B| = |A| \cdot \frac{\cancel{|B|}}{\cancel{|B|}}$$

$$\forall A \;\exists!\; AB = AB = I$$

$$BA = A \Rightarrow B = C$$

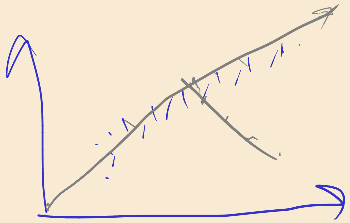
$$CA = A$$

$$\det(A) = 0$$

singular

PCA 2D 1D

SVD



$$\boxed{Q^T = Q^{-1}}$$

$$Q^T = Q$$

$$|Q^TQ| = |I|$$

$$A_{12} = A^T_{21}$$

$$|Q|$$

$$|Q^T| = |Q|$$

$$|Q^TQ| = |Q^T||Q| = k^2 = 1 \Rightarrow k = [1, -1]$$